Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig,
Mathematisch-physikalische Klasse **69** (1917) 262-277

SITZUNG VOM 30. APRIL 1917.

Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten.

Von

JOHANN RADON.

Integriert man eine geeigneten Regularitätsbedingungen unterworfene Funktion zweier Veränderlichen x, y — eine *Punktfunktion* $f(P)$ in der Ebene — längs einer beliebigen Geraden g, so erhält man in den Integralwerten $F(g)$ eine *Geradenfunktion.* Das in Abschnitt A vorliegender Abhandlung gelöste Problem ist die Umkehrung dieser linearen Funktionaltransformation, d. h. es werden folgende Fragen beantwortet: kann jede, geeigneten Regularitätsbedingungen genügende Geradenfunktion auf diese Weise entstanden gedacht werden? Wenn ja, ist dann f durch F eindeutig bestimmt und wie kann es ermittelt werden?

Im Abschnitte B gelangt das dazu in gewisser Hinsicht duale Problem der Bestimmung einer Geradenfunktion $F(g)$ aus ihren Punktmittelwerten $f(P)$ zur Lösung.

Schließlich werden im Abschnitte C gewisse Verallgemeinerungen kurz besprochen, zu denen insbesondere die Betrachtung nichteuklidischer Mannigfaltigkeiten sowie höherer Räume Anlaß gibt.

Die Behandlung dieser an sich interessanten Probleme gewinnt ein erhöhtes Interesse durch die zahlreichen Beziehungen, die zwischen diesem Gegenstande und der Theorie des logarithmischen und NEWTONschen Potentiales bestehen, auf die an den bezüglichen Stellen zu verweisen sein wird.

A. Bestimmung einer Punktfunktion in der Ebene aus ihren geradlinigen Integralwerten.

1. Es sei $f(x, y)$ eine für alle reellen Punkte $P = [x, y]$ erklärte reelle Funktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

a_1) $f(x, y)$ sei stetig.

b_1) Es konvergiere das über die ganze Ebene zu erstreckende Doppelintegral
$$\iint \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$$

c_1) Wird für einen beliebigen Punkt $P = [x, y]$ und jedes $r \geqq 0$
$$\bar{f}_P(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi,\ y + r\sin\varphi)\, d\varphi$$
gesetzt, so gelte für jeden Punkt P:
$$\lim_{r\to\infty} \bar{f}_P(r) = 0.$$

Dann gelten folgende Sätze:

Satz I: Der geradlinige Integralwert von f für die Gerade g mit der Gleichung $x\cos\varphi + y\sin\varphi = p$, der durch

$$\text{(I)}\quad F(p,\varphi) = F(-p, \varphi+\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos\varphi - s\sin\varphi, p\sin\varphi + s\cos\varphi)\, ds$$

gegeben ist, ist „im allgemeinen" vorhanden; das soll heißen: auf jedem Kreise bilden die Berührungspunkte jener Tangenten, für welche F nicht existiert, eine Menge vom linearen Maße Null:

Satz II: Bildet man den Mittelwert von $F(p, \varphi)$ für die Tangenten des Kreises mit dem Zentrum $P = [x, y]$ und dem Radius q:

$$\text{(II)}\qquad F_P(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x\cos\varphi + y\sin\varphi + q, \varphi)\, d\varphi,$$

so konvergiert dieses Integral für alle P, q absolut.

Satz III: Der Wert von f ist durch F eindeutig bestimmt und läßt sich folgendermaßen berechnen:

$$\text{(III)}\qquad f(P) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{d\bar{F}_P(q)}{q}.$$

Dabei ist das Integral im STIELTJESschen Sinne zu verstehen und kann auch durch die Formel:

$$\text{(III')} \qquad f(P) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{\overline{F}_P(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^\infty \frac{\overline{F}_P(q)}{q^2}\,dq\right)$$

definiert werden.

Indem wir zum Beweise schreiten, bemerken wir vorweg, daß die Bedingungen a_1 — c_1 gegenüber Bewegungen der Ebene invariant sind. Wir können also den Punkt $[0, 0]$ immer als Repräsentanten irgendeines Punktes der Ebene betrachten.

Man erkennt nun das Doppelintegral:

$$(1) \qquad \iint\limits_{x^2+y^2>q^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2-q^2}}\,dx\,dy$$

als absolut konvergent. Vermöge der Transformation

$$x = q\cos\varphi - s\sin\varphi, \quad y = q\sin\varphi + s\cos\varphi$$

geht dasselbe über in:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty f(q\cos\varphi - s\sin\varphi,\ q\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^0 f(q\cos\varphi - s\sin\varphi,\ q\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds,$$

so daß man seinen Wert auch durch

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\varphi - s\sin\varphi,\ q\sin\varphi + s\cos\varphi)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} F(q, \varphi)\,d\varphi$$

ausdrücken kann. Nach bekannten Eigenschaften der absolut konvergenten Doppelintegrale folgen hieraus die Behauptungen der Sätze I und II.

Um auf die Formel (III) zu kommen, kann man folgenden Weg einschlagen: Einführung von Polarkoordinaten in (1) liefert

$$\int_q^\infty dr \int_0^{2\pi} \frac{f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,d\varphi$$

oder mit Hilfe der Mittelwertsbezeichnung von $\mathfrak{c}_1$:

$$2\pi \int_q^\infty \frac{\overline{f}_0(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}.$$

Verglichen mit dem zuletzt erhaltenen Werte von (1) resultiert:

$$(2) \qquad \overline{F}_0(q) = 2\int_q^\infty \frac{\overline{f}_0(r)\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}$$

Führt man in dieser Integralgleichung erster Art die Variablen $r^2 = v$, $q^2 = u$ ein, so kann man sie leicht nach Art der bekannten ABELschen lösen und erhält die Formel (III) für

$$\overline{f}_0(0) = f(0, 0).$$

Bei dieser Ableitung erscheint es aber schwer, ohne weitere Bedingungen für f auszukommen, daher geben wir einer direkten Verifikation den Vorzug.

Zunächst ist, um die Gleichheit der Ausdrücke (III) und (III') zu zeigen, zu beweisen, daß:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\overline{F}_0(q)}{q} = 0.$$

Vermöge (2) ist

$$\left|\frac{\overline{F}_0(q)}{q}\right| \leqq \frac{2}{q}\left|\int_q^{2q} \frac{\overline{f}_0(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\right| + \frac{2}{q}\left|\int_{2q}^\infty \frac{\overline{f}_0(r)\,r\,dr}{\sqrt{r^2-q^2}}\right|$$
$$\leqq 2\sqrt{3}\,\left|\overline{f}_0(t)\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\int_{2q}^\infty \left|\overline{f}_0(r)\right|\,dr \qquad (q < t < 2q)$$

und dies konvergiert wegen $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ für $q \to \infty$ gegen Null.

Die rechte Seite von (III') geht nun durch Einführung von (2) über in:

$$\frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty \frac{r\,\overline{f}_0(r)}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr - \int_\varepsilon^\infty \frac{dq}{q^2}\int_q^\infty \frac{r\,\overline{f}_0(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr\right].$$

Vertauscht man in dem zweiten Integral die Integrationsfolge, so kann man nach q integrieren, erkennt dabei das Integral als absolut konvergentes Doppelintegral, was die Vertauschung rechtfertigt, und findet für obigen Ausdruck den Wert

$$\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\bar{f}_0(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr,$$

was tatsächlich $\bar{f}_0(0) = f(0, 0)$ liefert, wie unschwer zu zeigen ist.

2. Es sei $F(p, \varphi) = F(-p, \varphi + \pi)$ eine Geradenfunktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfüllt:

a_2) F und die Ableitungen F_p, F_{pp}, F_{ppp}, F_φ, $F_{p\varphi}$, $F_{pp\varphi}$ seien für alle $[p, \varphi]$ stetig.

b_2) F, F_φ, pF_p, $pF_{p\varphi}$ und pF_{pp} konvergieren für $p \to \infty$ gleichmäßig in φ gegen Null.

c_2) Die Integrale:

$$\int_0^\infty F_{pp}\, lp\, dp, \quad \int_0^\infty F_{ppp}\, p\, lp\, dp, \quad \int_0^\infty F_{pp\varphi}\, p\, lp\, dp$$

konvergieren absolut und gleichmäßig in φ.

Dann können wir beweisen:

Satz IV: Bildet man nach (III) bzw. (III') $f(P)$, so erfüllt dieses die Bedingungen a_1, b_1, c_1 und liefert als geradlinige Integralwerte das vorgelegte $F(p, \varphi)$. Infolge Satz III ist es die einzige derartige Funktion.

Führen wir in (III) Polarkoordinaten ein, so ergibt sich:

$$f(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{dp}{p}\int_0^{2\pi} F_p(\varrho\cos\omega + p, \omega + \psi)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty lp\, dp \int_0^{2\pi} F_{pp}(p + \varrho\cos\omega, \omega + \psi)\, d\omega.$$

Es ist nämlich:

$$\int_0^{2\pi} F_p(\varrho\cos\omega + p, \omega + \psi)\, d\omega = \int_0^{2\pi} F_p(\varrho\cos\omega, \omega + \psi)\, d\omega$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^p F_{pp}(\varrho\cos\omega + t, \omega + \psi)\, dt$$

und der erste Bestandteil ist wegen $F(p, \varphi) = F(-p, \varphi + \pi)$ gleich Null. Deshalb konvergiert das Produkt des Integrals mit lp

für $p \to 0$ gegen Null. Auf Grund derselben Eigenschaft von F folgt weiter:

$$(3) \quad f(\varrho\cos\psi, \varrho\sin\psi) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} F_{pp}(p, \omega + \psi)\, l\,|p - \varrho\cos\omega|\, dp.$$

Es genügt nun, wenn wir zeigen:

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varrho, 0)\, d\varrho = F\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

da die Bedingungen a_2—c_2 gegenüber Bewegungen invariant sind. Wir setzen:

$$F(p, \varphi) = F\left(p, \frac{\pi}{2}\right) + \cos\varphi \cdot G(p, \varphi).$$

G genügt leicht angebbaren Regularitätsbedingungen. Es zerfällt nun dieser Zerlegung zufolge $f(\varrho, 0)$ in zwei Bestandteile $f_1(\varrho)$ und $f_2(\varrho)$, die getrennt zu untersuchen sind. Wegen:

$$\int_0^\pi l\,|p - \varrho\cos\omega|\, d\omega = \begin{cases} \pi l \dfrac{|p| + \sqrt{p^2 - \varrho^2}}{2}, & |p| > |\varrho| \\ \pi l \dfrac{|\varrho|}{2}, & |p| \leqq |\varrho| \end{cases}$$

ergibt sich:

$$f_1(\varrho) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} F_{pp}\left(p, \frac{\pi}{2}\right) l\,|p - \varrho\cos\omega|\, dp$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{|\varrho|}^{\infty} F_{pp}\left(p, \frac{\pi}{2}\right) l \frac{|p| + \sqrt{p^2 - \varrho^2}}{|\varrho|}\, dp$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-|\varrho|} F_{pp}\left(p, \frac{\pi}{2}\right) l \frac{|p| + \sqrt{p^2 - \varrho^2}}{|\varrho|}\, dp.$$

Dies ist nun nach ϱ von $-\infty$ bis $+\infty$ absolut integrabel, wie durch Vertauschung der Integrationsfolge ersichtlich wird. Als Wert des Integrales erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{pp}\left(p, \frac{\pi}{2}\right) \int_{-|p|}^{+|p|} l \frac{|p| + \sqrt{p^2 - \varrho^2}}{|\varrho|}\, d\varrho$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} F_{pp}\left(p, \frac{\pi}{2}\right) |p|\, dp = F\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Was nun $f_2(\varrho)$ anbelangt, so werden wir zeigen, daß es ebenfalls absolut integrabel ist und von $-\infty$ bis $+\infty$ integriert Null ergibt.

Wir können nämlich $f_2(\varrho)$ folgendermaßen schreiben:

$$f_2(\varrho) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} G_{pp}(p,\omega)\, l\,|p-\varrho\cos\omega| \cdot \cos\omega\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\pi d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} G_{pp}(p,\omega)\left[l\left|\frac{p-\varrho\cos\omega}{\varrho\cos\omega}\right|\cos\omega + \frac{\varrho p\cos^2\omega}{1+\varrho^2\cos^2\omega}\right]dp,$$

da die hinzugefügten Glieder integriert Null ergeben, und in dieser Gestalt führt die Integration nach ϱ auf ein *absolut* konvergentes dreifaches Integral. Es ist nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\cos\omega\, l\left|\frac{p-\varrho\cos\omega}{\varrho\cos\omega}\right| + \frac{\varrho p\cos^2\omega}{1+\varrho^2\cos^2\omega}\right|d\varrho$$

$$= |p|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|l\left|1-\frac{1}{\tau}\right| + \frac{p^2\tau}{1+p^2\tau^2}\right|d\tau = \lambda(p)$$

mit

$$\lim_{|p|\to\infty}\frac{\lambda(p)}{|p|\,l\,|p|} = 2.$$

Die Integration nach ϱ liefert als Wert des Integrales:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\varrho)\, d\varrho = 0,$$

womit (4) bewiesen ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß f den Forderungen a_1—c_1 genügt.

Die Stetigkeit folgt aus der Darstellung (3) wegen der Voraussetzungen a_2—c_2. Forderung b_1 ist gleichfalls erfüllt, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\varrho\cos\psi,\ \varrho\sin\psi)|\, d\varrho$$

ist, wie man leicht sieht, nach ψ integrierbar.

Um noch c_1 nachzuweisen, bilden wir:

$$\bar{f}_0(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho\cos\psi,\ \varrho\sin\psi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\pi^3}\int_0^\pi d\omega\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} F_{pp}(p,\psi)\, l\,|p-\varrho\cos\omega|\, dp$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\psi\Bigg[\int_{-\infty}^{-|\varrho|} F_{pp}(p,\psi)\, l\frac{|p|+\sqrt{p^2-\varrho^2}}{2}\, dp$$

$$+\int_{|\varrho|}^{+\infty} F_{pp}(p,\psi)\, l\frac{|p|+\sqrt{p^2-\varrho^2}}{2}\, dp$$

$$+ F_p(\varrho,\psi)\, l\frac{\varrho}{2} - F_p(\varrho,\psi)\, l\frac{\varrho}{2}\Bigg],$$

woraus man die Richtigkeit von c_1 erkennt. Damit ist Satz IV bewiesen.

B. Bestimmung einer Geradenfunktion aus ihren Punktmittelwerten.

3. $F(p,\varphi) = F(-p,\varphi+\pi)$ sei eine Geradenfunktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

a_3) F, F_φ, F_p seien stetig, $|F_\varphi| < M$ für alle p, φ.

b_3) $F_p \cdot l|p|$ konvergiere für $p\to\infty$ gleichmäßig in φ gegen Null

c_3) $\int_{-\infty}^{+\infty}|F_p|\cdot l\,|p|\, dp$ konvergiere gleichmäßig in φ.

Diese Bedingungen sind wieder gegenüber Bewegungen invariant.

Wir bilden den Punktmittelwert von $F(p,\varphi)$ für $P=[x,y]$:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} F(x\cos\varphi + y\sin\varphi,\ \varphi)\, d\varphi. \tag{5}$$

Dann gilt:

Satz V: Durch Angabe von f ist F eindeutig bestimmt und zwar ist:

$$F\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x, y)\, dy, \tag{V}$$

wo das Integral nach x als CAUCHY*scher Hauptwert zu deuten ist und der Wert von F für irgendeine andere Gerade aus der angeschriebenen Formel durch eine entsprechende Bewegung abgeleitet werden kann.*

Zum Beweise leiten wir aus (5) zunächst ab:

$$\int_{-A}^{B} f_x(x, y)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-A}^{B} F_p(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi)\cos\varphi\, dy, \tag{6}$$

wo A, B zwei positive Konstante sind.

Wir setzen nun, wie schon früher analog geschehen ist:

$$F(p, \varphi) = F(p, 0) + \sin\varphi\, G(p, \varphi),$$

wobei $G(p, \varphi)$ im Integrationsgebiete beschränkt bleibt und für $p \to \infty$ den Grenzwert Null erhält. Aus:

$$\int_{-A}^{B} G_p(x\cos\varphi + y\sin\varphi, \varphi)\cos\varphi \cdot \sin\varphi\, dy$$

$$= [G(x\cos\varphi + B\sin\varphi, \varphi) - G(x\cos\varphi - A\sin\varphi, \varphi)]\cos\varphi$$

folgt, daß der zweite Bestandteil von (6) für $A \to \infty$, $B \to \infty$ den Grenzwert Null erhält, so daß nur der erste zu untersuchen bleibt. Durch die analoge Integration erkennt man, daß in diesem ersten Bestandteil das Integral nach φ über jedes $\varphi = 0$ *nicht* enthaltende Intervall für $A \to \infty$, $B \to \infty$ ebenfalls Null wird; es bleibt also zu betrachten:

$$\lim_{\substack{A\to\infty \\ B\to\infty}} \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\varphi \int_{-A}^{B} F_p(x\cos\varphi + y\sin\varphi, 0)\cos\varphi\, dy, \qquad 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}.$$

Man kann dieses Integral schreiben:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} d\varphi \int_{x\cos\varphi - A\sin\varphi}^{x\cos\varphi + B\sin\varphi} F_p(p, 0)\operatorname{ctg}\varphi\, dp$$

und erhält daraus, wenn A und B genügend groß angenommen werden, durch Vertauschung der Integrationsfolge nach einiger Rechnung den Wert:

$$\frac{1}{\pi}\int_{x\cos\varepsilon - B\sin\varepsilon}^{x\cos\varepsilon + B\sin\varepsilon} l\frac{(B^2 + x^2)\sin\varepsilon}{|Bp - x\sqrt{B^2 + x^2 - p^2}|} F_p(p, 0)\, dp$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{x\cos\varepsilon - A\sin\varepsilon}^{x\cos\varepsilon + A\sin\varepsilon} l\frac{(A^2 + x^2)\sin\varepsilon}{|Ap - x\sqrt{A^2 + x^2 - p^2}|} F_p(p, 0)\, dp.$$

Es genügt, den Grenzwert des zweiten Integrales für $A \to \infty$ zu ermitteln. Wir schreiben es so:

$$\frac{1}{\pi} l(A\sin\varepsilon)[F(x\cos\varepsilon + A\sin\varepsilon, 0) - F(x\cos\varepsilon - A\sin\varepsilon, 0)]$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{x\cos\varepsilon - A\sin\varepsilon}^{x\cos\varepsilon + A\sin\varepsilon} l\frac{1}{|p - x|} F_p(p, 0)\, dp$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{x\cos\varepsilon - A\sin\varepsilon}^{x\cos\varepsilon + A\sin\varepsilon} l\frac{|Ap + x\sqrt{A^2 + x^2 - p^2}|}{A\,|p + x|} F_p(p, 0)\, dp.$$

Da der Logarithmus in dem letzten Integral für $A \to \infty$ *gleichmäßig* gegen Null geht, so folgt als Grenzwert:

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_p(p, 0)\, l\,|p - x|\, dp,$$

womit der Grenzwert von (6) erhalten wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x, y)\, dy = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_p(p, 0)\, l\,|p - x|\, dp.$$

Es mag hier bemerkt werden, daß letzterer Ausdruck die Randwerte des Imaginärteils einer in der oberen Halbebene regulären analytischen Funktion darstellt, für welche die Randwerte des Realteiles den Wert $2F(x, 0)$ haben.

Bilden wir jetzt im Sinne der Formel (V):

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f_x(x,y)\,dy=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{x}\int_{-\infty}^{+\infty}F_p(p,0)\,l\left|\frac{p-x}{p+x}\right|dx,$$

so ist dieses Doppelintegral absolut konvergent und führt wegen

$$\int_0^{\infty}l\left|\frac{p-x}{p+x}\right|\frac{dx}{x}=-\frac{\pi^2}{2}\operatorname{sgn}p$$

genau zur Formel (V).

4. Es sei nun f eine Punktfunktion mit folgenden Regularitätseigenschaften:

a_4) f sei mit seinen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich stetig.

b_4) Die Ausdrücke

$$f(x,y),\quad \sqrt{x^2+y^2}\,l(x^2+y^2)f_x(x,y),\quad \sqrt{x^2+y^2}\,l(x^2+y^2)f_y(x,y)$$

haben für $x^2+y^2\longrightarrow\infty$ den Grenzwert Null.

c_4) Die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}D_1f\cdot\frac{l(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\quad\text{und}\quad\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}D_2f\cdot l(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

wo D_1f jede erste, D_2f jede zweite Ableitung von f bedeutet, konvergieren absolut.

Diese Bedingungen sind wieder gegenüber Bewegungen invariant.

Dann gilt:

Satz VI: Die aus f nach (V) gebildete Geradenfunktion besitzt die Punktmittelwerte $f(x, y)$.

Es genügt, den Beweis für den Nullpunkt zu erbringen. Für eine beliebige Gerade durch diesen ergibt (V) nach einer partiellen Integration:

$$F(0,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[f_{xx}\cos^2\varphi+2f_{xy}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+f_{yy}\sin^2\varphi]\,l\,|x\cos\varphi+y\sin\varphi|\,dx\,dy$$

oder nach Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ψ:

$$F(0,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\varrho\,d\varrho\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\partial^2f}{\partial\varrho^2}\cos^2(\varphi-\psi)$$
$$+2\frac{\partial^2f}{\partial\varrho\,\partial\psi}\frac{\sin(\varphi-\psi)\cos(\varphi-\psi)}{\varrho}+\frac{\partial^2f}{\partial\psi^2}\frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\varrho^2}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial\varrho}\frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\varrho}$$
$$-2\frac{\partial f}{\partial\psi}\frac{\sin(\varphi-\psi)\cos(\varphi-\psi)}{\varrho^2}\Big]\,l\,|\varrho\cos(\varphi-\psi)|\,d\psi.$$

Um den Punktmittelwert für $[0, 0]$ zu bilden, kann man die Integration nach φ unter dem Doppelintegral von 0 bis 2π ausführen und hat dann noch durch 2π zu dividieren. Das Glied mit $\frac{\partial^2f}{\partial\psi^2}$, das dabei zum Vorschein kommt, fällt vermöge Integration nach ψ weg und es bleibt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\psi\int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{4}\Big(\varrho\frac{\partial^2f}{\partial\varrho^2}-\frac{\partial f}{\partial\varrho}\Big)+\frac{1}{2}\,l\,\frac{\varrho}{2}\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\Big(\varrho\frac{\partial f}{\partial\varrho}\Big)\Big]d\varrho,$$

was sich in der Tat auf $f(0, 0)$ reduziert.

Um die eindeutige Bestimmtheit von F zu zeigen, wären die Bedingungen a_3—c_3 als erfüllt nachzuweisen, was offenbar noch weitere Voraussetzungen über f nötig macht.

5. Es möge hier folgende Bemerkung Platz finden, die ich, wie überhaupt die Problemstellung B, Herrn W. BLASCHKE verdanke: Die beiden hier behandelten Aufgaben stehen in engem Zusammenhange mit der Theorie des NEWTONschen Potentials. Betrachten wir nämlich den Übergang von einer Punktfunktion f zu ihren geradlinigen Mittelwerten F als eine lineare Funktionaltransformation

$$F=Rf,$$

und ebenso den Übergang von einer Geradenfunktion F zu ihren Punktmittelwerten v:

$$v=BF,$$

so liegt es nahe, die zusammengesetzte, durch

$$v=Hf=B[Rf]=BRf$$

definierte Transformation $H=BR$ zu betrachten.

Man sieht nun sofort, daß Hf nichts anderes ist, als das NEWTONsche Potential der mit der Massendichte $\frac{1}{\pi} f$ belegten Ebene in den Punkten der Ebene selbst. Daraus kann man nach einer Bemerkung von G. HERGLOTZ die Umkehrung der Transformation H gewinnen; es ergibt sich dabei:

$$f(P) = H^{-1} v = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d \bar{v}_P(r)}{r} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta v(x' y')}{r_{PP'}} dx' dy',$$

wo $\bar{v}_P$ eine zu den früher eingeführten analoge Mittelwertsbezeichnung ist und Δ den LAPLACEschen Operator bedeutet.

Nun liegt der Gedanke nahe, die in 1.—3. direkt geleitete Umkehrung von R und H durch den Ansatz

$$R^{-1} = H^{-1} B \quad \text{bzw.} \quad B^{-1} = R H^{-1}$$

zu leisten. Tatsächlich habe ich die Umkehrungsformel (IV) zuerst auf diesem Wege gefunden, aber eine strenge Durchführung dieses Gedankens scheint schwieriger zu sein als die direkte Verifikation und versagt auch in den gleich zu besprechenden nichteuklidischen Fällen.

Schließlich sei bemerkt, daß die in A und B zugrunde gelegten Regularitätsbedingungen selbstredend bei weitem nicht die allgemeinsten sind, wie sich an einfachen Beispielen zeigen läßt.

C. Verallgemeinerungen.

6. Eine weitgehende Verallgemeinerung des in A behandelten Problems ließe sich etwa folgendermaßen formulieren: es sei eine Fläche S gegeben, auf der irgendwie ein Bogendifferential ds definiert sei, ferner eine zweifach unendliche Schar von Kurven C auf S. Es soll eine Punktfunktion der Fläche aus ihren Integralwerten $\int f ds$ längs der Kurven C bestimmt werden.

Die nächstliegende Spezialisierung erhält man, wenn man für S eine nichteuklidische Ebene, für ds das zugehörige Bogenelement und für die Kurven C die Geraden nimmt. Im elliptischen Falle kann man die Aufgabe auf die Kugelgeometrie hinüberspielen; indem man in bekannter Weise ein diametrales Punktepaar der Kugel als Punkt der elliptischen Ebene deutet, erhält man die Aufgabe, eine gerade — d. h. in diametralen Punkten gleichwertige — Funktion auf der Kugel aus ihren Großkreisintegralen

zu bestimmen. MINKOWSKI hat diese Aufgabe im Prinzip zuerst behandelt[1]) und durch Entwicklung nach Kugelfunktionen gelöst; P. FUNK hat später die MINKOWSKIsche Lösung durchgeführt und gezeigt, wie man die Lösung mit Hilfe der ABELschen Integralgleichung finden kann[2]) und dieser Methode verdanke auch ich die Lösung des Problems A. Die FUNKsche Lösung ist ganz analog zu (III), nur tritt in den Nenner der Sinus des sphärischen Radius und additiv zu dem Integral der Wert von F im Pole des betreffenden Großkreises dividiert durch π. Aber auch in der hyperbolischen Ebene hat die gestellte Aufgabe die zu (III) analoge Lösung:

$$f(P) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d \bar{F}_P(q)}{\mathfrak{Sin}\, q}$$

(es ist hier das Krümmungsmaß $= -1$ angenommen), wie sich ganz konform zu der in 1. angedeuteten Ableitung von (III) zeigen läßt.

In beiden Fällen kann man auch die zu B. analoge Frage stellen. In der elliptischen Geometrie erhält man vermöge der absoluten Polarität nichts Neues, im hyperbolischen Falle scheint eine zu (V) analoge Lösung nicht zu existieren.

Eine zweite Spezialisierung ergibt sich, wenn man (in der euklidischen oder nichteuklidischen Geometrie) als Kurven C die Kreise mit konstantem Radius nimmt. Hier kann man auf der Kugel die MINKOWSKIsche Behandlung mit Kugelfunktionen anwenden und die Aufgabe in gewissem Grade lösen. Interessant ist in diesem Falle, daß die Eindeutigkeit der Lösung verloren gehen kann; es gibt nämlich für gewisse, durch die Nullstellen der LEGENDREschen Polynome gerader Ordnung definierte Radien ϱ gerade Funktionen auf der Kugel, die längs jedes Kreises vom sphärischen Radius ϱ integriert, Null ergeben, ohne identisch zu verschwinden. Im euklidischen Falle tritt an Stelle der Kugelfunktionenreihen das Integraltheorem der Besselfunktionen; hier gibt es stets Funktionen, die über alle Kreise von festem Radius integriert, Null geben und doch nicht identisch verschwinden; ist der Radius 1, so sind es (in Polarkoordinaten ϱ, φ) die Funktionen

$$J_n(x_\nu \varrho) \cos n\varphi, \quad J_n(x_\nu \varrho) \sin n\varphi,$$

und ihre Linearkombinationen, wo x_ν eine Nullstelle von J_0 ist. Im hyperbolischen Falle treten an Stelle der Besselfunktionen die

1) Ges. Abh., Bd. II, S. 277f. 2) Math. Ann., Bd. 74, S. 283—288.

sogenannten Kegelfunktionen, für die das zugehörige Integraltheorem von WEYL[1]) bewiesen ist. Die Ergebnisse sind analog zum euklidischen Falle.

7. In anderer Richtung verallgemeinern sich die Ergebnisse von A und B beim Übergang zu höheren Räumen. In einem euklidischen R_n kann man eine Punktfunktion $f(P)=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ aus ihren Integralwerten $F(\alpha_1 \ldots \alpha_n, p)$ über alle Hyperebenen $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = p$ $(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1)$ zu bestimmen trachten. Analog zu dem in 1. eingehaltenen Vorgang bilden wir den Mittelwert $\overline{F_0}(q)$ von F über die Tangentialebenen der Kugel vom Zentrum $[0, 0 \ldots 0]$ und Radius q. Er ist durch das $n-1$ fache Integral:

$$\overline{F}_0(q) = \frac{1}{\Omega_n}\int F(\alpha, q)\, d\omega$$

gegeben, wo $d\omega$ das Oberflächenelement, $\Omega_n = \dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ die Oberfläche der n-dimensionalen Kugel $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1$ bedeutet.

Man kann $\overline{F}_0$ durch ein n-faches Integral über f darstellen und zwar ergibt sich:

$$\overline{F}_0(q) = \frac{\Omega_{n-1}}{\Omega_n} \int\limits_{x_1^2+\cdots+x_n^2>q^2} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots x_n) \frac{(x_1^2+\cdots+x_n^2-q^2)^{\frac{n-3}{2}}}{(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}}\, dx_1 \ldots dx_n \tag{7}$$

oder in einer nun schon oft verwendeten Mittelwertsbezeichnung:

$$F_0(q) = \Omega_{n-1}\int_q^\infty \overline{f_0}(r)(r^2-q^2)^{\frac{n-3}{2}}\, r\,dr.$$

Dies ist die zu (1) analoge Formel, an die sich entsprechende Folgerungen anschließen. Die Substitution $r^2 = v$, $q^2 = u$ führt auf die Integralgleichung:

$$\Phi(u) = \frac{\Omega_{n-1}}{2}\int_u^\infty \varphi(v)(v-u)^{\frac{n-3}{2}}\, dv.$$

1) Gött. Nachr. 1910, S. 454.

Ist n *gerade*, so ergibt $\left(\frac{n}{2}-1\right)$-maliges Differentiieren nach u dieselbe Gleichung wie (2) und man kann hieraus

$$\varphi(0) = f(0, 0, \ldots 0)$$

finden, wozu also bei gegebenem F die Bildung von F, Differentiationen und eine Integraloperation nötig sind. Bei *ungeradem* n fällt diese Integraloperation weg, denn jetzt ergibt $\left(\frac{n-1}{2}\right)$-maliges Differentiieren:

$$\varphi(0) = \frac{2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\Omega_{n-1}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}(0).$$

Besonders einfach gestaltet sich der dreidimensionale Fall; diesen kann man aber auch nach einer Methode behandeln, die zu 5. analog ist und sehr elegante Ergebnisse liefert. Aus (7) geht nämlich für $q = 0$ der Punktmittelwert von F hervor:

$$\overline{F}_0 = \frac{1}{2}\iiint \frac{f(x, y, z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz,$$

der als das NEWTONsche Potential des mit der Massendichte $\frac{1}{2}f$ belegten Raumes anzusprechen ist. Also folgt:

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi}\Delta\overline{F},$$

wo $\overline{F}$ den Punktmittelwert von F bedeutet.

Hier kann man auch die zu B. analoge Aufgabe lösen und findet nach der in 5. angedeuteten Methode für eine Ebenenfunktion F, deren Punktmittelwerte f bekannt sind:

$$F(E) = -\frac{1}{2\pi}\iint \Delta f\, d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement der Ebene E ist. Δ ist der LAPLACEsche Operator für den dreidimensionalen Raum, die Integration über die ganze Ebene E zu erstrecken.

Druckfertig erklärt 1. X. 1917.]